5. PARALELISMO DE RECTAS Y PLANOS.

5.1. RECTAS PARALELAS.

Si dos rectas son paralelas, tienen pendientes iguales y sus proyecciones también son paralelas. En consecuencia, sus intervalos son iguales y crece su graduación en el mismo sentido. Para comprobar esta situación de rectas paralelas, basta unir puntos de igual cota, si las rectas trazadas son paralelas las rectas también lo son; en caso contrario las rectas se cruzan.

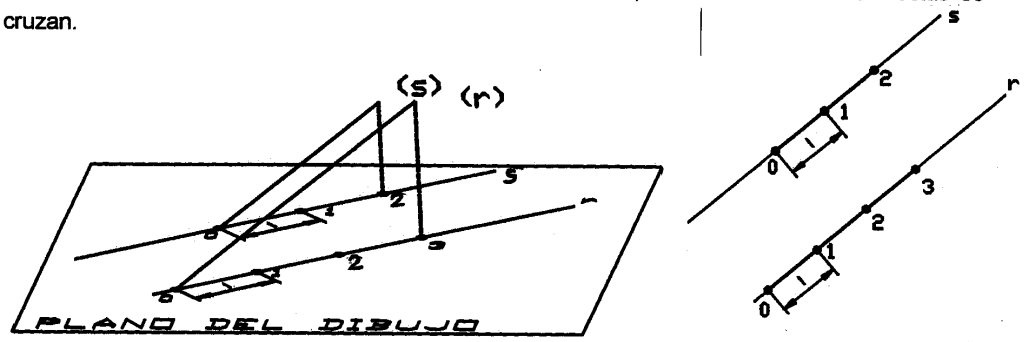


Figura 4.42

5.2. RECTA Y PLANO PARALELOS.

Para que lo sean basta que la recta dada (r) lo sea a una cualquiera del plano (P).

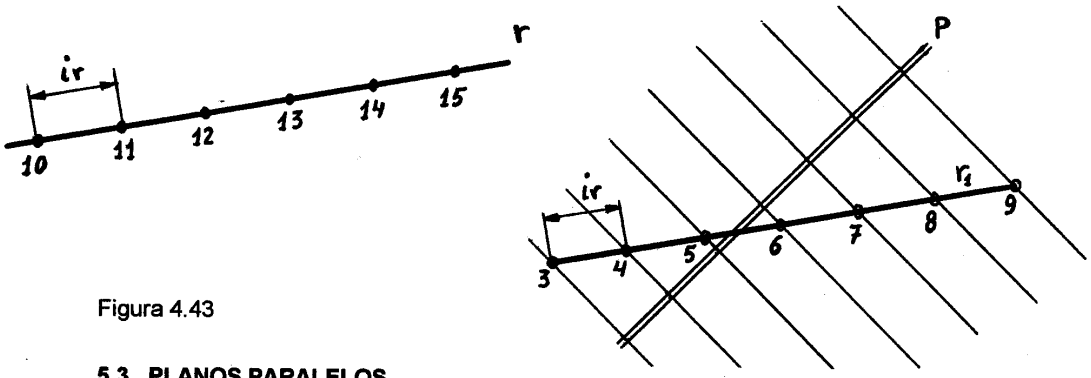


Figura 4.43

5.3. PLANOS PARALELOS.

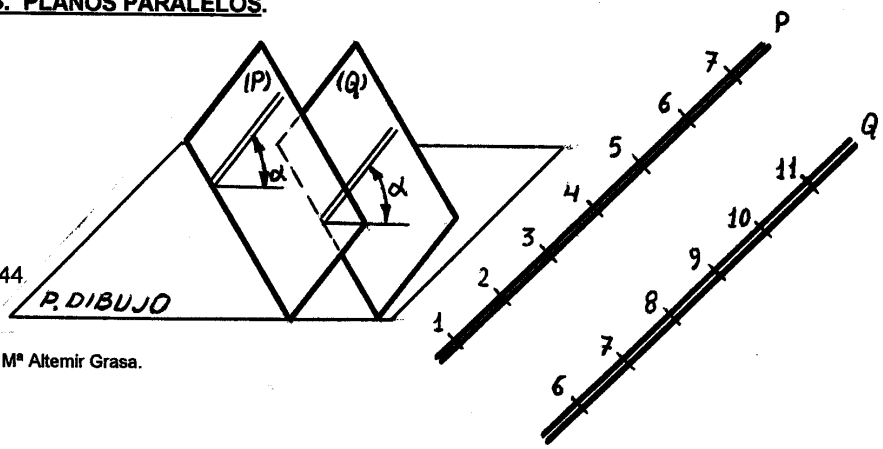


Figura 4.44

Dos planos son paralelos cuando sus r.m.p. son paralelas, sus intervalos son iguales y la graduación crece en el mismo sentido.

EJERCICIO.

Plano paralelo a una recta r y que contenga a otra recta dada s.

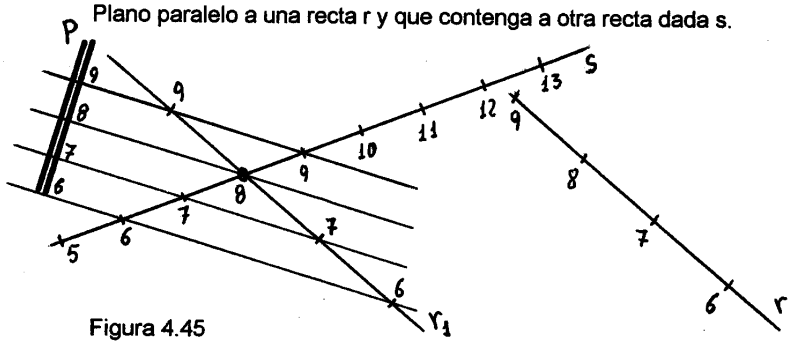


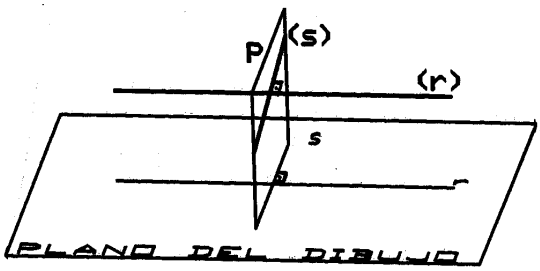
Figura 4.45

El plano solución será el formado por la recta dada **s** y una paralela a la **r** que corte a la recta s.

6. PERPENDICULARIDAD DE RECTAS Y PLANOS.

6.1. RECTAS PERPENDICULARES.

Si dos rectas, r y s, son perpendiculares sus proyecciones también lo serán si, por lo menos, una de ellas es paralela al plano del dibujo como indica el TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES.



Como estas perpendicualres se reducen, en el caso general, a rectas horizontales, es necesario analizar otra interrelación geométrica para estudiar la perpendicularidad en el Sistema de Planos Acotados.

Figura 4.46

Para ello, como muestra la figura 4.47, se traza una recta perpendicular a la dada que esté situada en un plano proyectante paralelo al de la recta inicial.

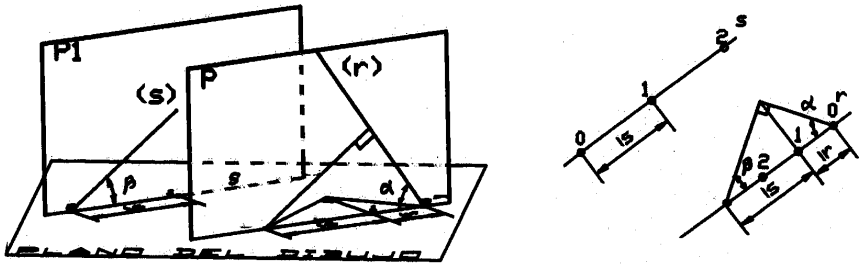


Figura 4.47

Las dos rectas ortogonales tienen sus proyecciones paralelas, los intervalos son inversos 1 = ir x is y la graduación aumenta en sentido contrario. Como se observa en la figura, $\beta = 90 - \alpha$; tag β= tag (90-α) = 1/tag α .

6.2. RECTA Y PLANO PERPENDICULARES.

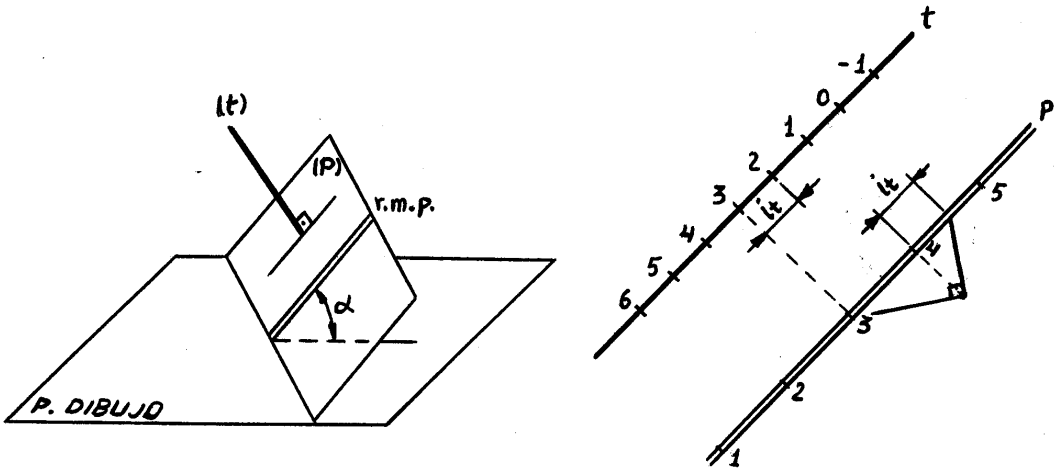


Figura 4.48

La recta perpendicular a un plano es una recta (t) perpendicular a la r.m.p. del plano. Por otra parte, el plano perpendicular a una recta es el que tiene su r.m.p. perpendicular a la recta dada.

6.3. PLANOS PERPENDICUALRES.

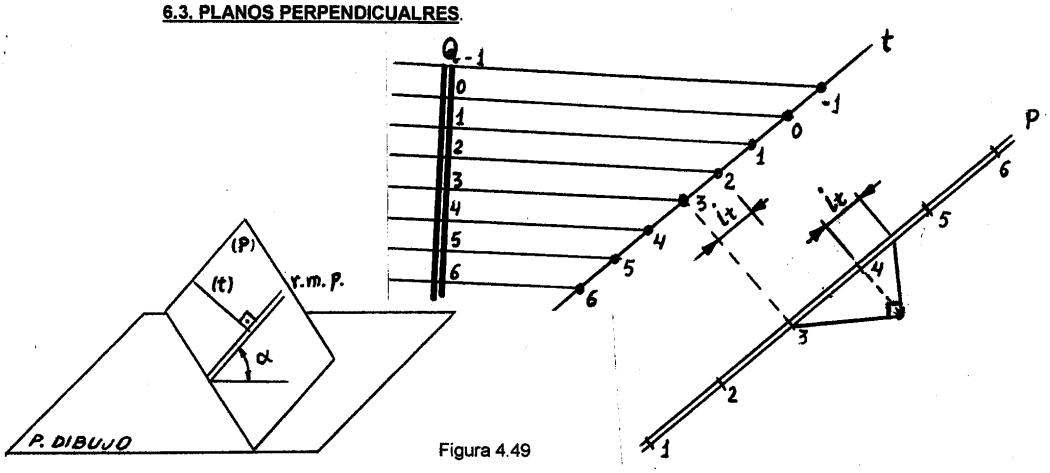


Figura 4.49

La recta (t) es perpendicular al plano (P), cualquier plano del haz que contenga a la recta t es perpendicular al plano (P).

EJERCICIOS.

1.- Trazar el plano Q que contenga a una recta dada r y sea perpendicular a un plano dado P.

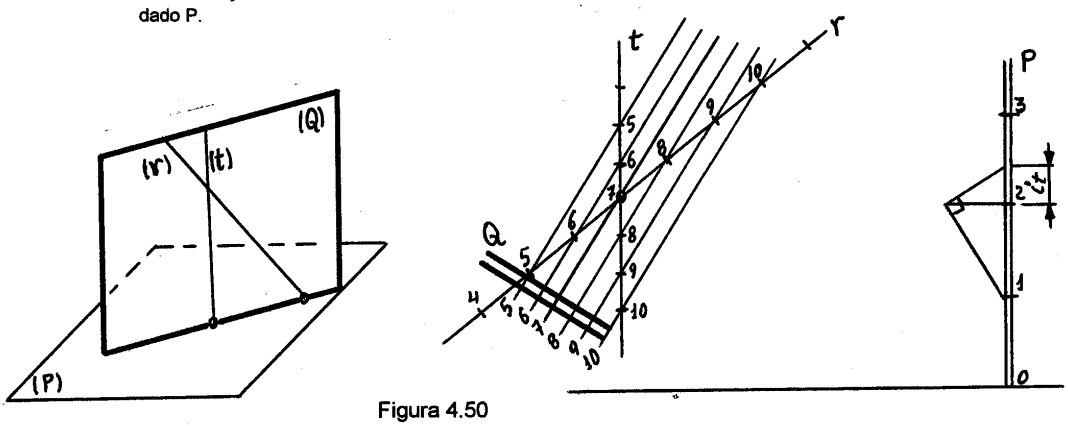
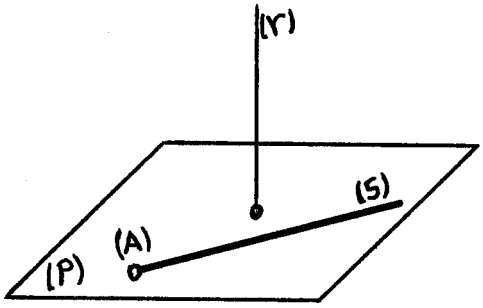


Figura 4.50

Por el punto de cota 7 de la recta r, se traza la recta t perpendicular al plano P. El plano Q solución es el formado por las rectas r y t.

2.- Por un punto dado A trazar una recta s perpendicular a una dada r y que tenga pendiente p=0.5.



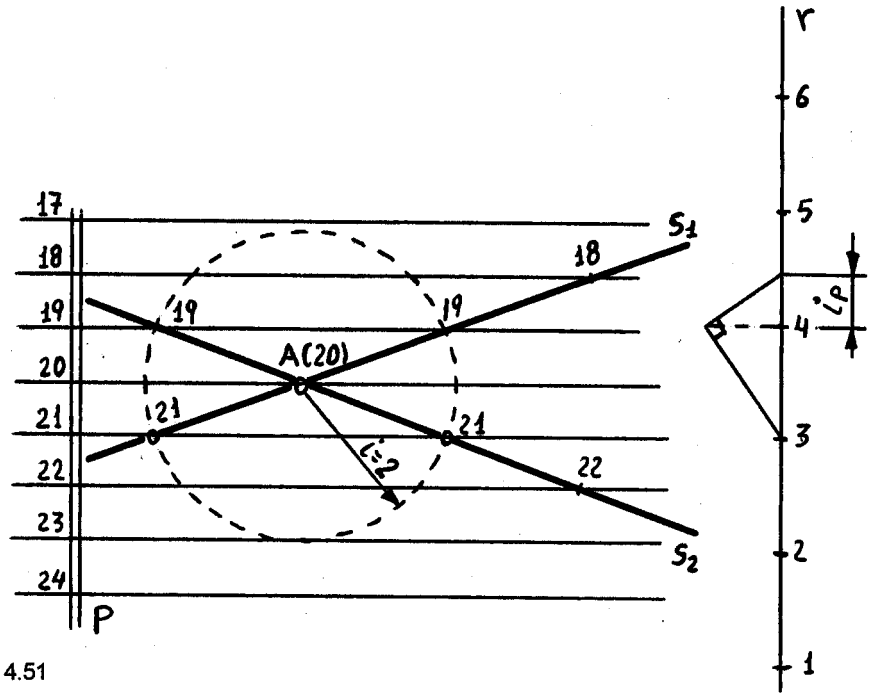
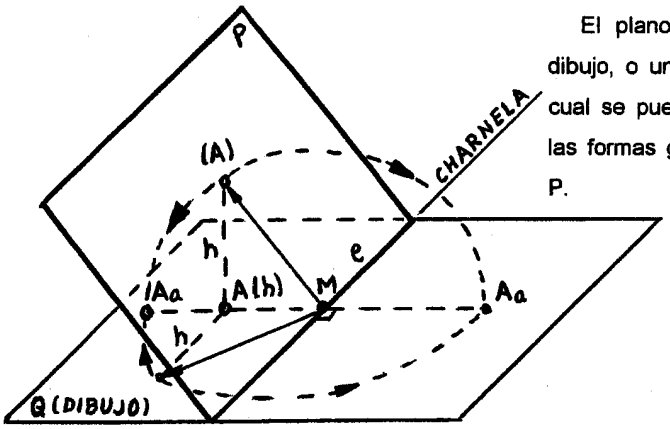


Figura 4.51

Por el punto A se traza el plano P perpendicular a la recta r. Como toda recta contenida en el plano P es perpendicular a r, las dos soluciones son las rectas contenidas en el plano P, que pasan por el punto A y tienen pendiente p=0.5.

7. ABATIMIENTOS.

El abatimiento es una operación gráfica que hace coincidir un plano P sobre otro Q por medio de un giro alrededor de la intersección de ambos, que será el eje del abatimiento o charnela.



El plano Q es generalmente el plano del dibujo, o un plano paralelo al mismo, sobre el cual se puede estudiar en verdadera magnitud las formas geométricas pertenecientes al plano P.

Figura 4.52

7.1. ABATIMIENTO DE UN PUNTO DE UN PLANO.

No se puede abatir un punto o una recta, ya que por definición únicamente se puede abatir un plano. No obstante, se dice que "un punto se abate" cuando se abate el plano que lo contiene.

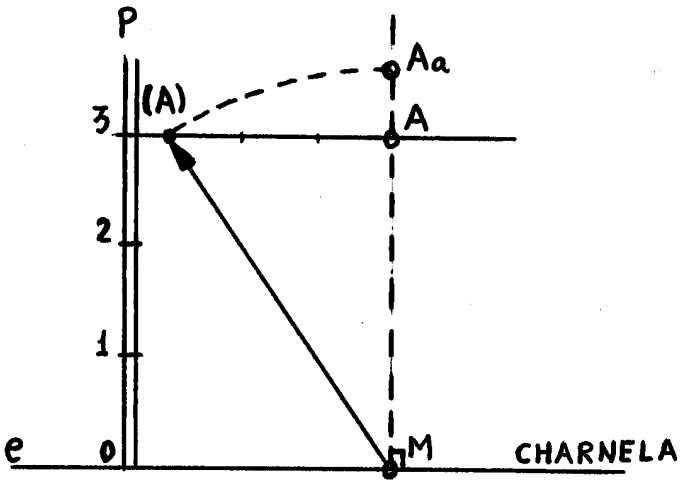


Figura 4.53

Al girar el plano P alrededor de su traza e, el punto (A) describe una circunferencia de centro M y radio M(A) = MAa, cuyo plano es perpendicular a la charnela e. Si A es la proyección del punto, el punto Aa abatido se encuentra sobre la perpendicular AM a la charnela. La distancia M(A), radio de la circunferencia de giro, se obtiene como la hipotenusa del triángulo rectángulo que tiene por catetos AM y la cota del punto (A) que se abate.

Como procedimiento se puede indicar que: para abatir un punto A de un plano sobre el plano del dibujo se traza desde su proyección la perpendicular AM a la traza del plano o charnela. Sobre la horizontal del plano del punto se lleva un segmento igual a la cota del punto y se traza con centro M y radio M(A) el arco que cortará a la perpendicular AM en dos puntos que son los posibles abatidos, según el plano gire hacia uno u otro lado.

Algunas veces puede interesar abatir el punto sobre un plano horizontal paralelo al del dibujo. En este caso, la charnela es la recta horizontal de intersección del plano dado con el de abatimiento y el segmento que se lleva sobre la horizontal del plano que pasa por el punto debe ser la diferencia entre la cota del punto y la del plano de abatimiento.

7.2. ABATIMIENTO DE UNA RECTA DE UN PLANO.

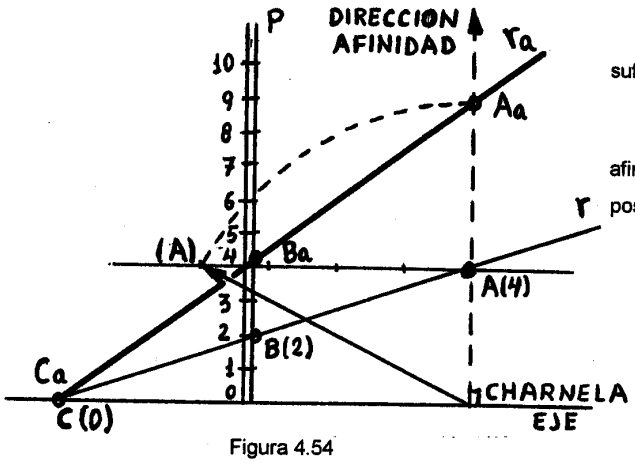


Figura 4.54

Para abatir una recta de un plano es suficiente abatir dos cualesquiera de sus puntos.

Sin embargo, se establece una relación de afinidad entre la proyección de la recta r y su posición abatida ra que facilita el proceso.

La afinidad queda definida por el eje, que es la charnela de abatimiento, y dos puntos afines obtenidos por el abatimiento previo de uno de sus puntos. La dirección de afinidad, que une los puntos afines es perpendicular al eje.

Para obtener la recta ra abatida, como el punto C de corte con el eje es doble, se obtiene uniendo Ca con el previamente abatido Aa.

7.3. ABATIMIENTO DE UNA FIGURA PLANA.

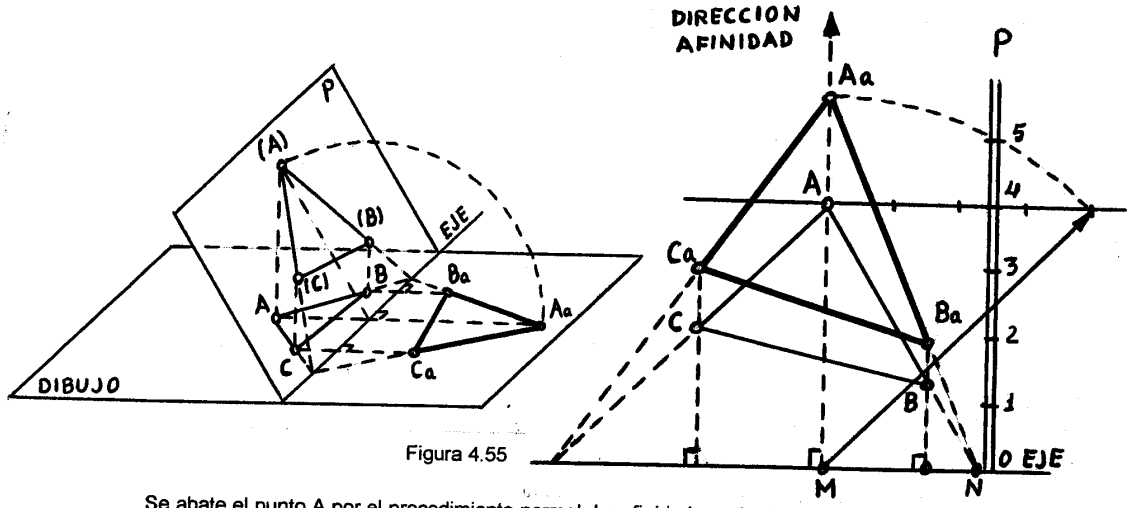


Figura 4.55

Se abate el punto A por el procedimiento normal. La afinidad queda determinada por el EJE, que es la charnela de abatimiento, y la DIRECCION definida por los puntos A y Aa.

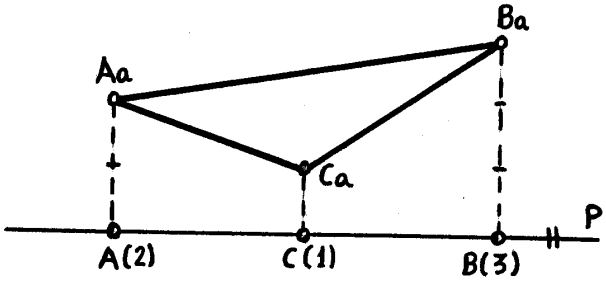
Para obtener el abatido del punto B, se prolonga el lado AB hasta que corta al eje, punto N, y la recta abatida de AB es la NAa.

Sobre esa abatida estará el Ba abatido, en la dirección de afinidad desde la proyección B.

Para el punto C se procede de igual forma.

Si el plano que se abate es vertical, como el que se muestra en la figura 4.56, basta trazar por cada una de las proyecciones de los vértices las perpendiculares a la traza y tomar sobre ellas las alturas o cotas respectivas, obteniéndose, en Aa, Ba y Ca los abatidos de los vértices y con ellos la figura abatida.

Figura 4.56



7.4. RESTITUCION.

La restitución es la operación inversa al abatimiento. Se conoce el abatido Aa de un punto, situado en el plano P, y se desea hallar la proyección acotada de ese punto.

El proceso de resolución consiste en aplicar las construcciones explicadas para el abatimiento, pero en sentido inverso.

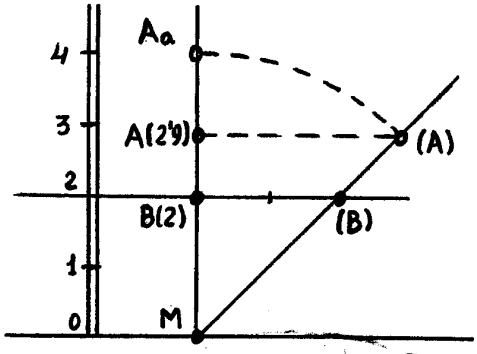


Figura 4.57

Se traza desde Aa la perpendicular a la charnela, obteniendo el punto M. Se coge sobre la perpendicular el punto auxiliar B, de cota 2, y se obtiene la recta en verdadera magnitud M(B). La intersección entre la recta M(B) y la circunferencia de centro M y radio MAa determina el punto (A), que llevado sobre la proyección MAa proporciona la proyección A buscada. La altura o cota del punto A es A(A).

Para restituir una recta, basta desabatir o restituir dos de sus puntos como acaba de explicarse. Si la recta abatida corta a la charnela, el punto de intersección, por ser doble, coincidirá con su proyección y sólo será necesario desabatir otro punto de la recta.

Para restituir una figura plana, basta desabatir uno de los vértices, por ejemplo el Aa de cota 4, y obtener el resto por afinidad. Para ello, una vez conocida la proyección del punto A(4), se prolongan los lados AaBa y AaDa obteniendo dos puntos de corte con el eje de afinidad que al unirlos con el A(4) dan las proyecciones de los lados; para limitarlos se trazan las perpendiculares de los respectivos puntos Ba y Da hasta que los corten. De la misma forma se determina la proyección del punto Ca.

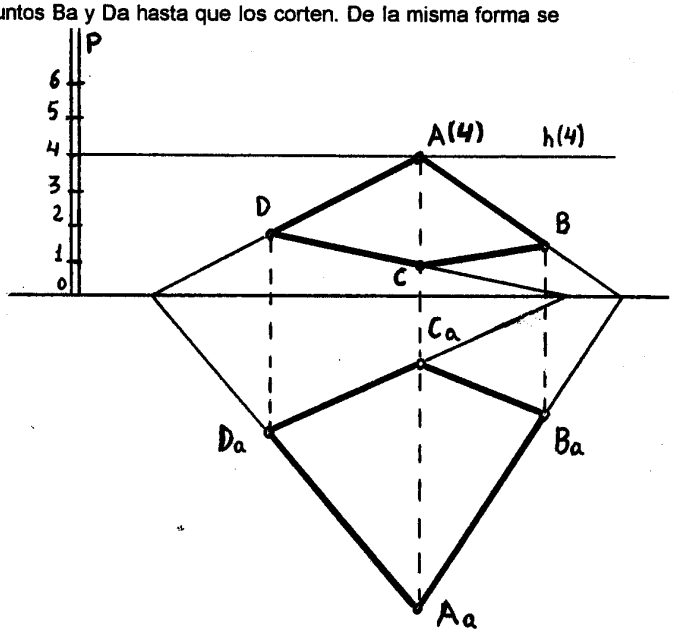


Figura 4.58

La restitución de la circunferencia, como muestra la figura 4.59, es una elipse con el eje mayor, vértices A y B, paralelo a la charnela o eje de afinidad y el eje menor, vértices C y D, perpendicular.

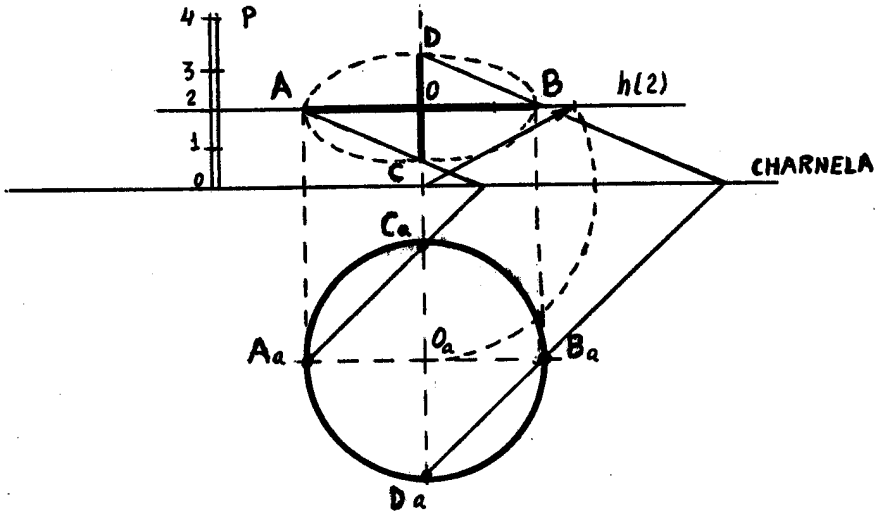


Figura 4.59

8. DISTANCIAS.

8.1. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.

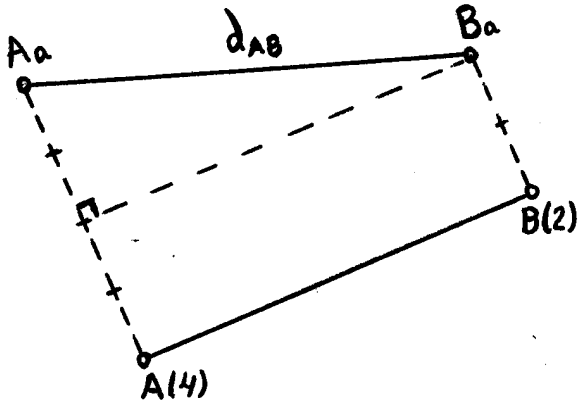


Figura 4.60

Para encontrar la distancia entre dos puntos se abate el plano proyectante de la recta que los une. Para ello basta levantar por A y B perpendiculares a la recta proyección y sobre ellas tomar las cotas correspondientes para tener Aa y Ba. AaBa es la verdadera distancia entre los puntos.

También puede calcularse la distancia entre los puntos mediante la hipotenusa del triángulo rectángulo que tiene como catetos la proyección del segmento y el incremento de altura entre los puntos.

8.2. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA.

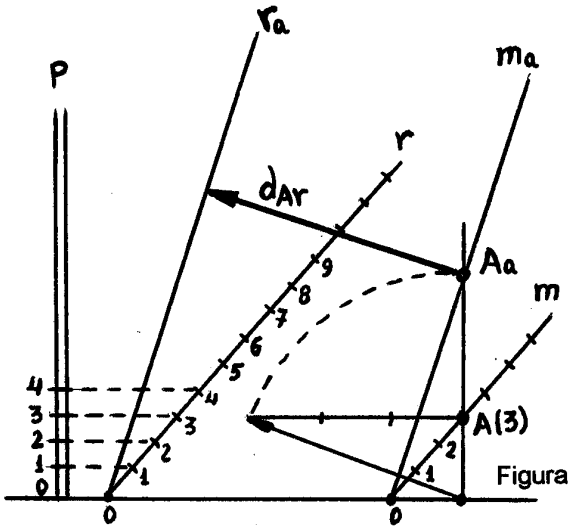


Figura 4.61

Sea el punto A y la recta r.

Para encontrar la distancia entre ambos se traza el plano P formado por el punto A y la recta r. El plano P se obtiene trazando por A una recta m paralela a r. Se abate el punto A y luego la recta m por afinidad, la recta ra es paralela a ma. La distancia buscada es la distancia entre Aa y ra.

También puede resolverse este problema trazando por A el plano P perpendicualr a r, se halla la intersección del plano P y la recta r, y la distancia IA es la buscada.

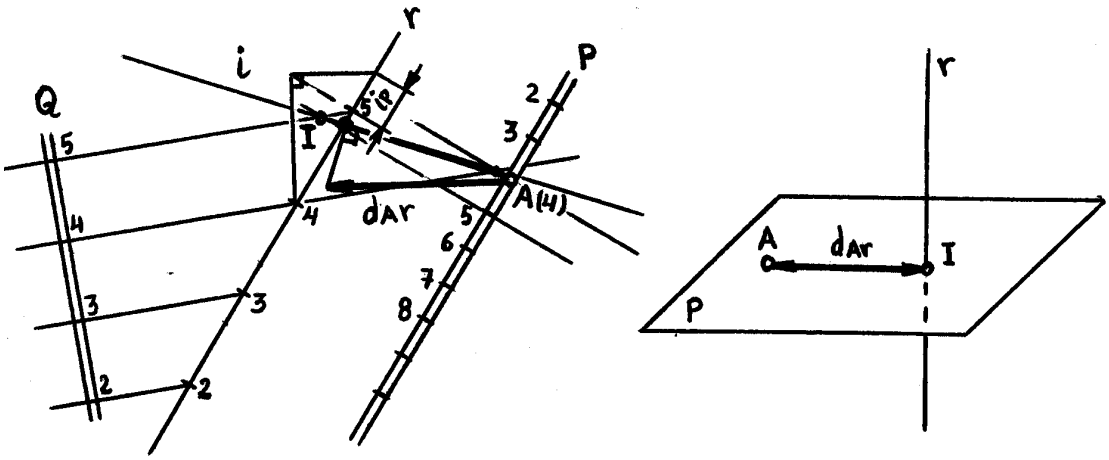


Figura 4.62

8.3. DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO.

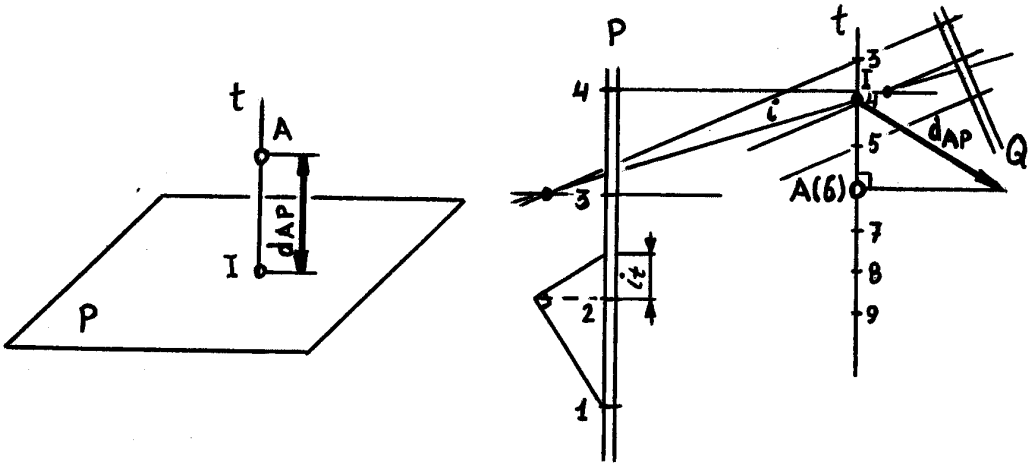


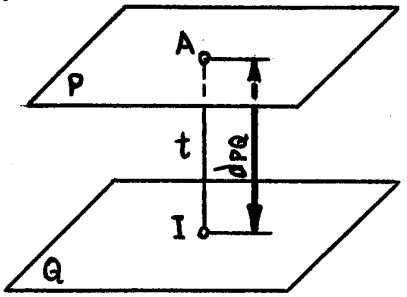
Figura 4.63

Se traza por A la recta t perpendicular al plano P, se obtiene el punto I de intersección entre la recta t y el plano P, y la distancia buscada es la del segmento IA.

8.4. DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS.

Bastará abatir el plano que las contiene como se procedió en el primer caso de distancia de un punto a una recta.

8.5. DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS PARALELOS.



Se toma el punto A perteneciente a uno de los planos, por ejemplo al plano P, y se procede de igual modo que en el caso de distancia de un punto a un plano.

Figura 4.64

9. REPRESENTACION DE TERRENOS.

9.1. CURVAS DE NIVEL.

Una de las aplicaciones del Sistema de Planos Acotados es la representación de terrenos; superficies sin ley geométrica determinada. Se estudian representando sus intersecciones con planos horizontales tanto más próximos, cuanta mayor exactitud se requiera en la solución del problema concreto. Así se obtienen las llamadas **"curvas de nivel"** que se designan por sus cotas. Cada curva de nivel, o **"línea de nivel"** queda definida por su proyección sobre el plano del dibujo y por su cota respecto a este plano.

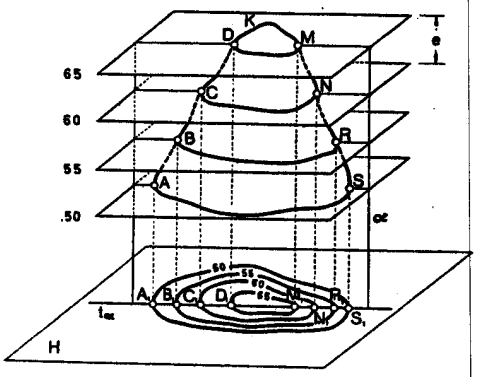


Figura 4.65

Con los aparatos topográficos se toman los datos de los diversos puntos del terreno en campo y en trabajo de gabinete se calculan las coordenadas y se representan en planta con sus cotas o alturas referidos a un plano horizontal de cota 0.

Uniendo por curvas, los puntos de igual cota se obtienen las curvas de nivel. Se eligen, en general, puntos de cota entera, múltiplos de 5, o de 10 (10,20,30,etc.) y a este incremento de medida se llama **equidistancia**.

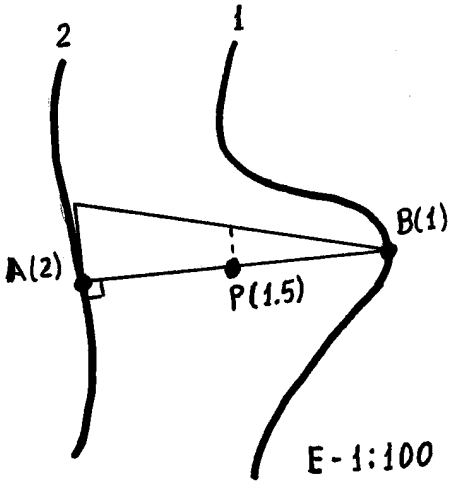


Figura 4.66

Un punto situado en una curva de nivel queda perfectamente determinado. Para hallar las cotas en puntos P situados entre dos curvas de nivel se traza desde él una perpendicular a la curva de nivel inmediata que cortará en A y a la siguiente en B. El punto P se considera situado en AB y su cota será la que correspondería en la recta AB.

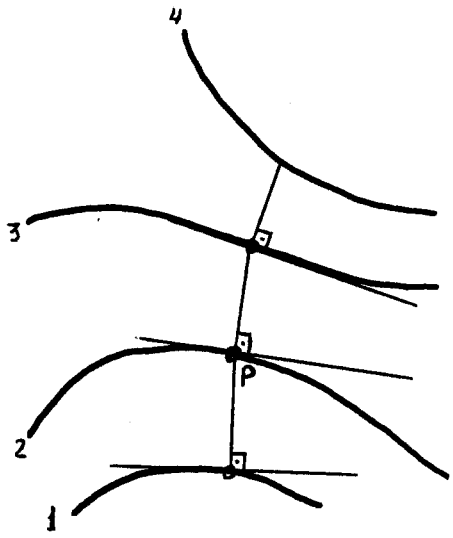
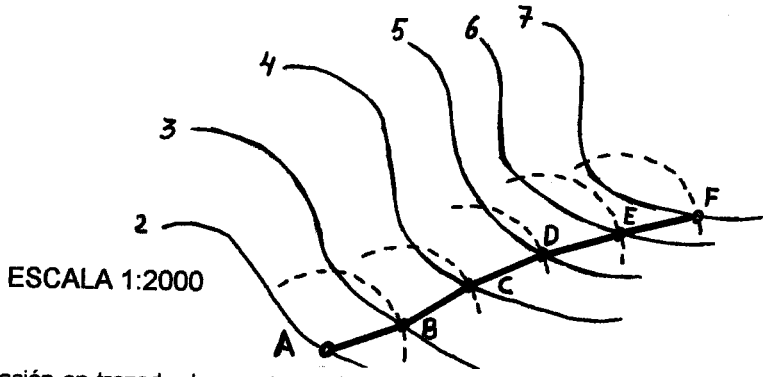


Figura 4.67

La **LINEA DE MAXIMA PENDIENTE** en un punto P se halla trazando en P el plano tangente a la superficie en dicho punto. La horizontal del plano en el punto P será tangente a la curva de nivel; la recta de m.p. del plano será normal a la horizontal en P, o sea que la línea de m.p. de la superficie topográfica tiene su tangente perpendicular a la curva de nivel, o lo que es lo mismo, toda línea de máxima pendiente corta ortogonalmente a las curvas de nivel. De aquí se deduce que las líneas de m.p. son trayectorias ortogonales a las curvas de nivel y esta ortogonalidad se conserva en la proyección sobre el dibujo por ser las curvas de nivel horizontales.

9.2. TRAZADO DE LINEAS DE PENDIENTE CONSTANTE.

Se llama **LINEA DE PENDIENTE CONSTANTE** aquella cuya inclinación y, por tanto, su pendiente es constante. Es un polígono de vértices situados sucesivamente en curvas de nivel consecutivas y cuyos lados tienen longitud constante, es decir de intervalo constante.



ESCALA 1:2000

Figura 4.68

Es de aplicación en trazado de carreteras, ferrocarriles, canales que siguen el terreno con pendiente constante, tuberías forzadas y en líneas eléctricas.

Para hallar la línea de pendiente constante del 5% que parte del punto A en la figura 4.68 y llega a la curva de nivel de cota 7, se determina el intervalo entre cada dos curvas de nivel.

i= 1/pendiente= 1/(5/100)= 20 metros.

i= 20*1000/ESCALA = 20*1000/2000= 10 mm.

Se toma centro en el punto A y con radio 10 mm. se obtiene el punto de cota 3 que cumple la condición de pendiente constante, de las dos soluciones **posibles se elige aquella** que corresponde a la dirección que se aproxime al punto de destino. Se repite el proceso entre las distintas curvas de nivel (puntos A, B, C,D, E y F) hasta alcanzar la cota más próxima al punto de llegada.

9.3. PERFILES DEL TERRENO.

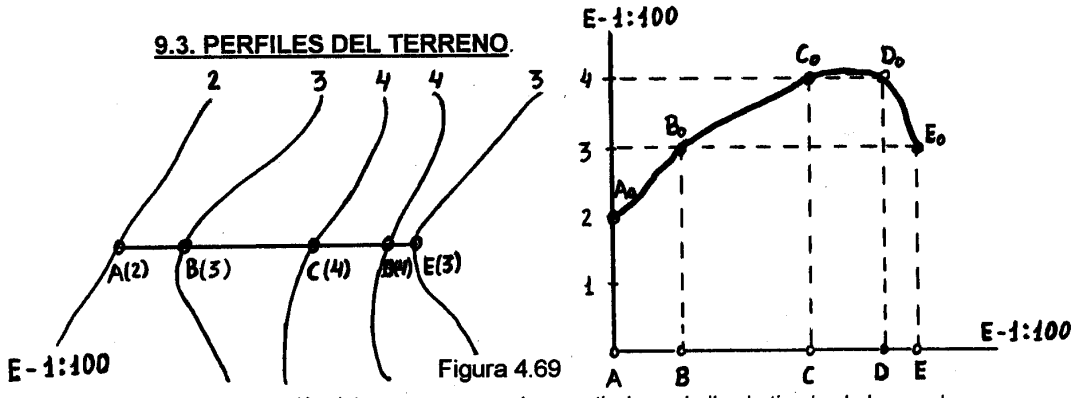


Figura 4.69

Es la intersección del terreno con un plano vertical y se halla abatiendo el plano, sobre el dibujo o en figura aparte.

El perfil a determinar puede estar definido por una poligonal y en este caso se sitúan consecutivos los perfiles correspondientes a los distintos tramos.

Para levantar un perfil se procede de la siguiente forma:

- Se señalan los puntos de intersección de la traza del plano con las curvas de nivel.

- Por cada uno de los puntos de intersección se trazan perpendiculares a la traza del plano y en cada uno se lleva la cota correspondiente.

- Los puntos obtenidos se unen a sentimiento con el fin de dar una aproximada de la forma del terreno.

En la representación de perfiles se pueden utilizar dos escalas. Una para las horizontales y otra para las alturas, ya que las distancias horizontales suelen ser mucho mayores que las alturas.

Así en horizontales se toman 1:100 - 1:200 - 1:500 para planos de terrenos, 1:1000 - 1:2000 para urbanismo y 1:5000 a 1:50.000 para mapas.

En alturas dependerá de lo montañoso, pero se toman 1:10 a 1:1000.

En función de las escalas utilizadas los perfiles se clasifican en:

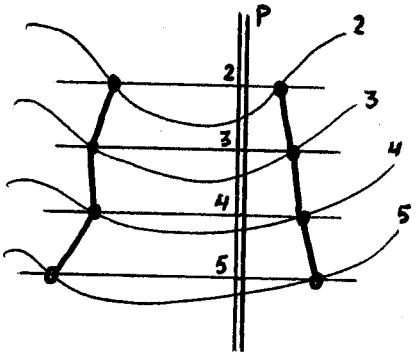
- **Naturales**: Cuando la escala de las longitudes horizontales y verticales es la misma del plano.

- **Realzados**: La escala de las longitudes horizontales es la misma del plano pero la de las longitudes verticales es mayor.

- **Ampliados**: Las escalas horizontal y vertical son iguales pero ambas mayores que la del plano.

9.4. EXPLANACIONES.

Se llaman así a las partes del terreno que queremos hacerlas planas y, en algunos casos, horizontales. Las operaciones de excavación y relleno, necesarias para realizar una explanación del terreno, reciben el nombre de desmontes y terraplenes, respectivamente.



La intersección de uno de estos planos, dado por su r.m.p., con el terreno se obtiene por la intersección de los puntos de sus horizontales con las líneas de nivel correspondientes de igual cota, tal como se muestra en la figura 4.70.

- Figura 4.70

En los movimientos de tierras se presenta el problema de intersección de dos superficies, la del terreno y la que se quiere conseguir. La línea intersección nos dará la línea que permanece. Del conocimiento de ambas superficies se puede deducir el volumen del movimiento de tierras.

9.4.1. EXPLANACIONES HORIZONTALES.

Como ejemplo de aplicación se quiere obtener sobre el terreno dado una explanación que sea la indicada en la figura 4.71 a cota 75 y con terraplenes de inclinación 45º y con desmontes de 60º.

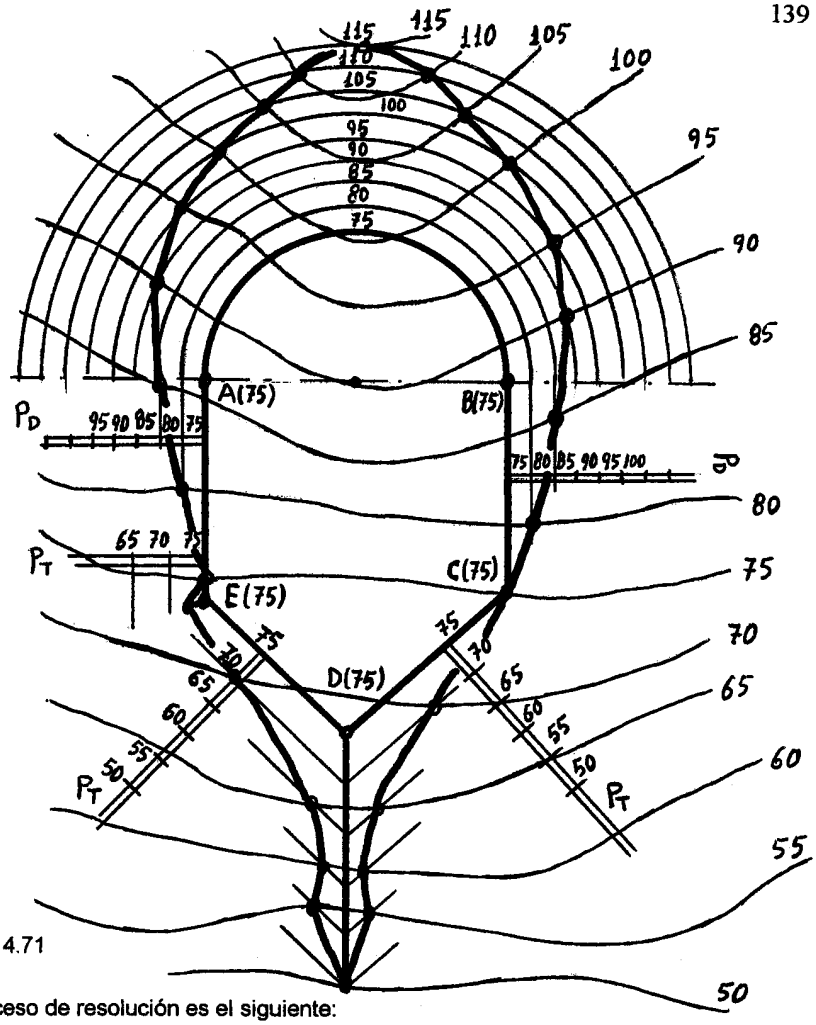


Figura 4.71

El proceso de resolución es el siguiente:

1. Determine los intervalos de los planos de terraplén y de desmonte.

Intervalo de planos de terraplén, i= 5/tag 45º= 5 metros, a escala 1:1000 y expresado en milímetros, i= 5x1000/1000 = 5 mm.

Intervalo de los planos de desmonte, i= 5/tag 60º = 2.886 metros, como en el caso anterior, a la escala del plano y expresado en milímetros, i= 2.886x1000/1000 = 2.886 mm.

2. Dibuje el contorno de terreno a explanar. Desde la cota 75 hacia arriba habrá desmonte y desde esa cota hacia abajo terraplén.

3. Halle las intersecciones con el terreno y entre sí de los planos de intervalo de desmonte y el plano horizontal de cota 75. Los bordes de la explanación serán las intersecciones obtenidas.

4. Proceda de igual modo con los planos de terraplén de la parte inferior.

5. En la parte curva, las horizontales de plano serán curvas paralelas separadas el valor del intervalo que aumentarán de cota en el caso de desmonte y disminuirán de cota en el caso de terraplén.

9.4.2. EXPLANACIONES CON PENDIENTE.

Sobre el mismo terreno anterior se va a trazar una explanación que tiene una pendiente de desagüe definida por los tres vértices A(75), B(80) y C(70).

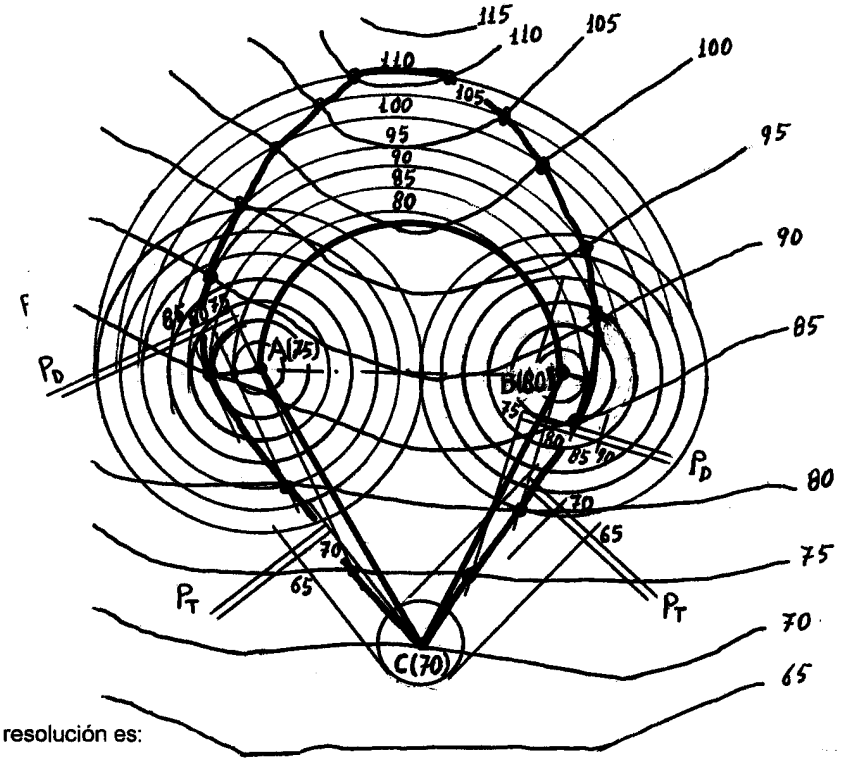


Figura 4.72

El proceso de resolución es:

1. Se determina los intervalos de los planos de terraplén y de desmonte. Si suponemos se mantiene los datos del ejemplo anterior se tiene:

intervalo de terraplén= 5 mm.

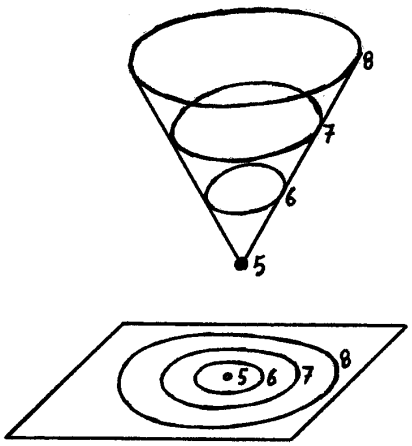
" de desmonte= 2.886 mm.

2. se gradúa cada lado de la explanación con los vértices conocidos.

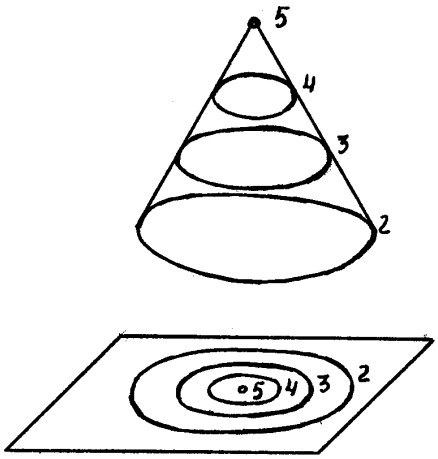
3. Se definen los planos de desmonte en la parte superior mediante circunferencias concéntricas de incremento de radio el intervalo para determinar las horizontales de plano y se halla la intersección entre sí y con el terreno por la intersección de las horizontales de plano con las curvas de nivel.

4. Se procede de igual modo con la parte inferior, determinando los planos de terraplén.

5. Para la parte curva, se trazan conos que tengan su vértice en el punto del borde conocido y que sus paralelos se incrementen en el valor del radio el intervalo. La figura siguiente muestra el cono de terraplén y de desmonte.



Cono de desmonte.



Cono de terraplén.

Figura 4.73

Las horizontales de plano serán las curvas envolventes de las circunferencias de igual cota y permiten hallar la intersección de esta superficie envolvente con el terreno o con los planos de terraplén y de desmonte.

9.5. TRAZADO DE CARRETERAS.

El trazado de las grandes alineaciones para carreteras, ferrocarriles o transporte de fluidos, etc., es un problema complejo y delicado por la cantidad y variedad de factores que intervienen y que dan lugar, por consiguiente, a un gran número de soluciones; entre éstas, debe elegirse la que más convenga al fin para el que se proyecta la alineación, sin olvidar otros aspectos de tipo económico, turístico, etc., que son los que, en conjunto, deciden si el trazado elegido ha sido, o no, acertado.

Primeramente, se trazan sobre el plano los tramos rectilíneos que componen la alineación y luego se unen por curvas de mayor o menor radio, según las características del terreno y de la vía que se proyecta. La figura 4.74 es una parte de un plano topográfico, en el que se ha trazado la alineación de una carretera de 6 metros de anchura, así como su eje y el ancho de la explanación. En ella puede apreciarse un tramo rectilíneo y otro, en curva, de 54 metros de radio.

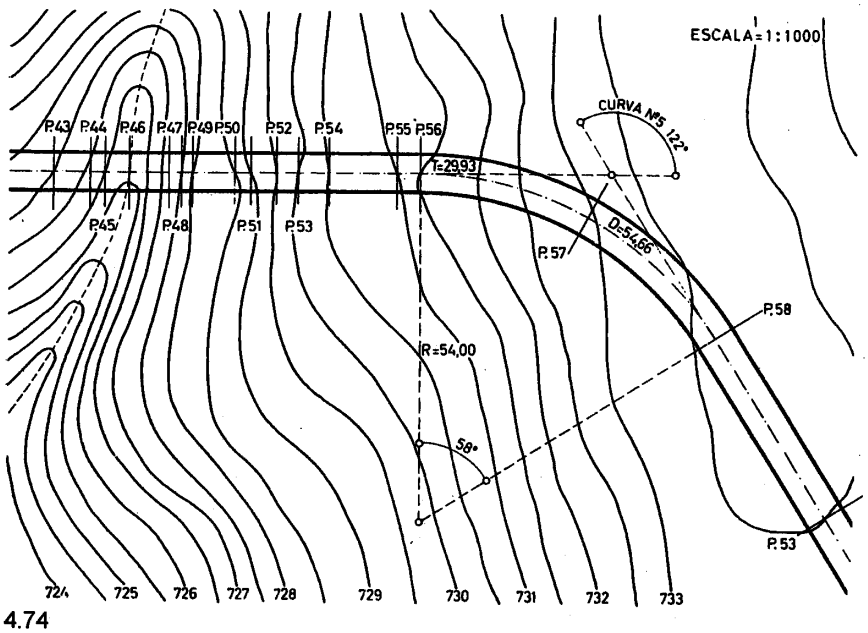


Figura 4.74

Luego, se dibujan sobre el plano las trazas de los perfiles transversales, normales al eje de la carretera, colocando al lado de cada uno, el número que le corresponde.

A continuación, se levanta el perfil longitudinal del terreno, figura 4.75, siguiendo la alineación del eje de la carretera.

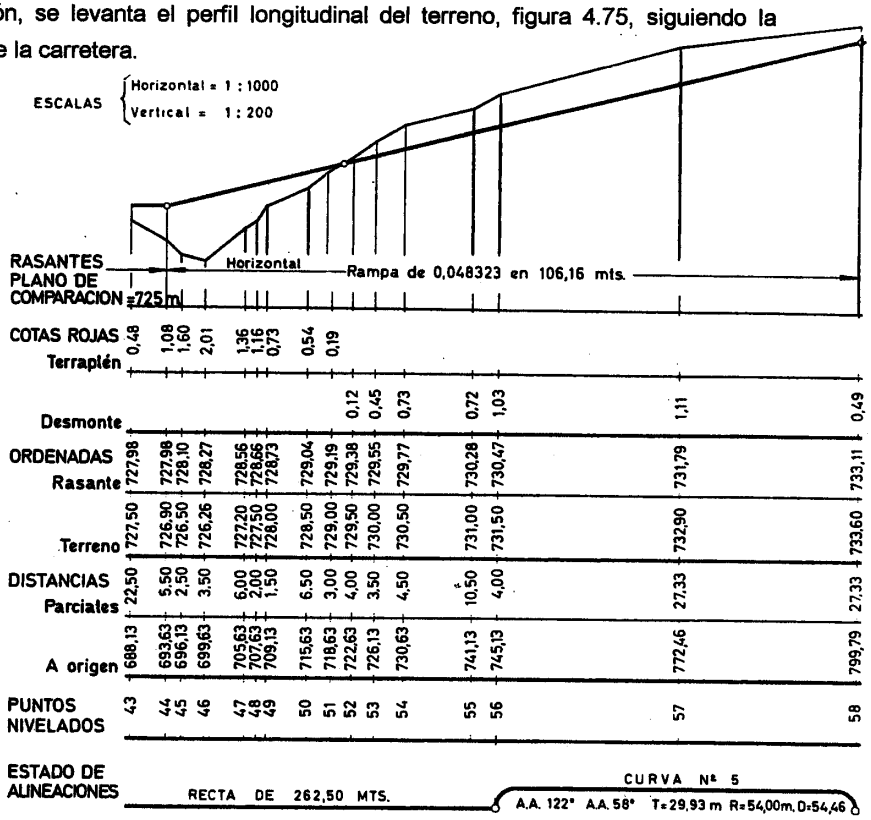


Figura 4.75.

Una vez levantado el perfil longitudinal, se dibujan las rasantes de la alineación, procurando no sobrepasar la máxima pendiente admisible y compensar, en lo posible, los desmontes y terraplenes, procediéndose en seguida a colocar las acotaciones indicadas en la parte inferior del perfil, cuyo significado es el siguiente:

Estado de alineaciones: Se indica si la alineación es recta o curva, expresando en ambos casos su longitud, y en el segundo, su radio y ángulo en el centro y, en ocasiones, el ángulo de las tangentes, la longitud T de éstas y la D, de la curva.

Puntos nivelados: Son los números de orden de los puntos de la alineación que corresponden a cada uno de los perfiles.

Distancias al origen: Son las distancias a cada uno de los perfiles transversales, medidas desde el origen.

Distancias parciales: Son las que existen entre cada uno de los perfiles y el anterior a él.

Ordenadas del terreno: Son las cotas que han servido para dibujar el perfil longitudinal.

Ordenadas de la rasante: Se miden sobre el dibujo directamente, después de trazar la rasante.

Cotas rojas: Son las diferencias entre las cotas del terreno y de la rasante. Si es mayor la primera, habrá que desmontar, colocándose esta diferencia en la horizontal de la cota de desmonte. Si fuera a la inversa, se anotaría en la de cota de terraplén.

Plano de comparación: El que ha servido de referencia para levantar el perfil. La cota de este plano debe ser inferior a la más baja del perfil.

Rasante: Se señalan las partes horizontales y las que han de estar en pendiente, anotando en estas últimas la pendiente y la longitud de su proyección horizontal, y en las primeras, su longitud.

Se pasa luego a la construcción de los perfiles transversales, figura 4.76, dibujándolos unos debajo de otros, de modo que sus ejes se correspondan en la misma vertical. Se traza a continuación, el perfil transversal del terreno y se sitúa el eje de la rasante, que estará por encima o por debajo del terreno, según que su cota roja sea de terraplén o desmonte, respectivamente.

A la izquierda de la columna de los perfiles y sobre una vertical, se anotarán las distancias parciales que figuran en el perfil longitudinal y, a la derecha de cada perfil, se anotará el área de la sección de desmonte o terraplén que se haya calculado, indicando éstas en letras D o T, respectivamente. Finalmente, en la parte superior de cada perfil, deberá indicarse su número de orden.

Los perfiles transversales son necesarios para calcular el volumen de tierras de desmonte y terraplén y realizar luego la compensación entre ambos.

Perfiles Transversales

ESCALA = 1:200

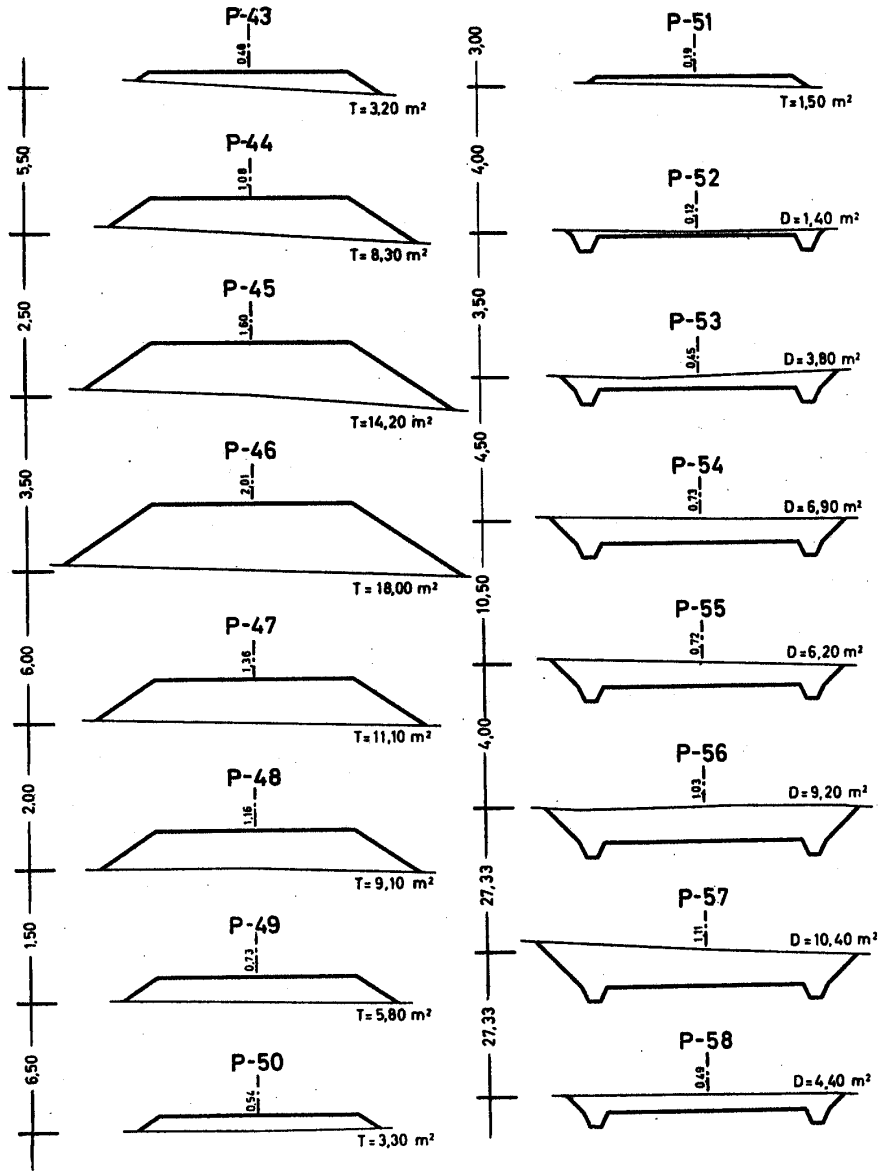


Figura 4.76